# Gentle 代数的矩阵模型及其整体维数

张梦蝶 [1]，刘雨喆 [2]，章超[1,*]

(1. 贵州大学数学与统计学院，贵州 贵阳 550025; 2. 南京大学数学系，江苏 南京 210093; * 通讯作者, E-mail: zhangc@amss.ac.cn.)

**摘要**：该文利用 gentle 代数的矩阵模型刻画了 gentle 代数上的单模和投射模，给出了单模的投射分解的矩阵表示. 由此指出 gentle 代数的整体维数可以由它的矩阵模型所诱导的一类特殊子矩阵序列进行刻画. 该文进一步指出这一类特殊子矩阵序列对应 gentle 代数的箭图上的极大非平凡 forbidden 路，从而得到 gentle 代数的整体维数等于它的箭图上的极大非平凡 forbidden path 的长度.

**关键词**：投射模；投射分解；同调维数；矩阵表示；箭图表示.

**中国分类号**: O151.21; O154.2 **文献标识码**: A

# The Matrix Model of Gentle Algebra and the Global Dimension

ZHANG Meng-Die[1], LIU Yu-Zhe[2], ZHANG Chao[1,*]

(1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang 550025, China;
2. Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

**Abstract:** It is showed that for gentle algebra, the simple module and projective module can be characterized by matrix model, and a matrix representation of projective resolution of simple module is provided. Thus the global dimension of a gentle algebra can be characterized by a special submatrix sequence induced by its matrix model. Furthermore, by showing that above special submatrix sequences correspond to maximal non-trivial forbidden paths on the quiver of gentle algebra, the global dimension of gentle algebra equals the length of the maximal nontrivial forbidden path is obtained.

**Key words:** projective module; projective resolution; homological dimension; matrix representation; quiver representation.



## 引言

Gentle 代数由 Assem-Skoworński 引入，最初用于研究 $\tilde{\mathbb{A}}_n$ 型代数上的倾斜代数，并建立相应的导出等价分类[1]. Gentle 代数与许多重要代数有着密切联系，例如双列代数(biserial algebra)，特殊双列代数(special biserial algebra)，弦代数(string algebra), skew-gentle 代数等. 早在 1985 年, Wald 和 Waschbüsch 就利用箭图表示对双列代数进行了分类[2]，那之后, Butler 和 Ringel 在 1987 年利用箭图表示进一步地分类了弦代数上的不可分解模[3]. Gentle 代数上的不可分解模之间的态射的研究则分别由 Crawley-Boevey [4]和 Krause [5]给出. 由此 gentle 代数的模范畴可以通过箭图表示完全刻画. Gentle 代数的模范畴的几何刻画则由 Baur 和 Coelho-Simões 给出[6]，其将 gentle 代数上的不可分解模对应为曲面上的 permissible (closed) curve，不可分解模之间的不可约态射对应到曲线的旋转(pivot elementary moves). He-Zhu-Zhou 在此基础上进一步刻画了 skew-gentle 代数的几何模型[7]，并将 support $\tau$-倾斜模刻画为曲面的剖分. Burban 和 Drozd 给出了 gentle 代数和 skew-gentle 代数的矩阵表示[8]，并给出了投射复形范畴的不可分解对象的分类. 由此易见，对许多代数问题, gentle 代数可以

---

**基金项目**：国家自然科学基金地区基金(11961007)；贵州省科技厅基金项目([2020]1Y405).
**作者简介**：张梦蝶（1998-），女，湖北汉川人，硕士，主要从事代数表示论的研究. E-mail: zmy1net@163.com;
刘雨喆（1992-），男，贵州遵义人，博士，主要从事代数表示论的研究. E-mail: yzliu3@163.com.
章超(1986-)，男，湖北宜昌人，教授，博士，主要从事基础数学(代数学)的研究. E-mail: zhangc@amss.ac.cn.

有效地提供算例或者反例.

另一方面, 对代数的研究可归结于对定义在此代数上的模的研究, 并用特殊模类直接反应代数的性质. 例如, 通过特殊模定义代数的同调维数 (homological dimension), 并用同调维数对代数进行分类. 其中, 整体维数可以反应给定代数到遗传代数的距离, 自内射维数可以反应代数的 Gorenstein 同调性质. 文献[9]利用几何模型给出了 gentle 代数的整体维数的曲面刻画, 本文将利用矩阵模型给出 gentle 代数的整体维数的矩阵刻画.

本文约定: $\Bbbk$ 是代数闭域. 对任意有限维 $\Bbbk$-代数 $A$, 总假设 $A$ 是 basic 代数, 因此根据 Gabriel 图化定理, 唯一存在箭图 (quiver) $\mathcal{Q}$, 使得 $A\cong\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$, 其中 $\mathcal{I}$ 是可许理想 (admissible ideal). 本文所考虑的模均是有限维 $\Bbbk$-代数 $A$ 上的有限生成右 $A$-模, 并用记号 $\mathsf{mod}(A)$ 表示 $A$ 的有限生成右 $A$-模范畴.

# 1. Gentle 代数

## 1.1. Gentle 代数及其定义

本节将介绍 gentle 代数的箭图表示和矩阵表示. 这里, 箭图(*quiver*)指四元组 $\mathcal{Q}=(\mathcal{Q}_0,\mathcal{Q}_1,s,t)$, 其中, $\mathcal{Q}_0$ 和 $\mathcal{Q}_1$ 是集合 (二者的元素分别称为顶点(*vertex*)和箭向(*arrow*)), $s$ 和 $t$ 是映射 $\mathcal{Q}_0\to\mathcal{Q}_1$, 且对任意 $\alpha\in\mathcal{Q}_1$, $s(\alpha)\in\mathcal{Q}_0$ 和 $t(\alpha)\in\mathcal{Q}_0$ 分别称为 $\alpha$ 的起点和终点. 箭图 $\mathcal{Q}$ 上的一条路(*path*) $p=\alpha_1\ldots\alpha_l$ 指有序的箭向序列 $\alpha_1\ldots\alpha_l$, 其中 $t(\alpha_k)=s(\alpha_{k+1})$ $(\forall 1\le k<l)$, $l$ 称作 $p$ 的长度(*length*), 记作 $\ell(p)$. 注意每一个箭向 (或顶点) 可以看作长度 1 (或 0) 的路. 因此, $\mathcal{Q}_0$ 和 $\mathcal{Q}_1$ 也分别表示所有长度为 0 的路和长度 1 的路的集合.

**定义 1.1.** 箭图 $\mathcal{Q}=(\mathcal{Q}_0,\mathcal{Q}_1,s,t)$ 的路代数 (*path algebra*) $\Bbbk\mathcal{Q}$ 是满足下述条件的 $\Bbbk$-代数:

- $\Bbbk\mathcal{Q}$ 是以 $\mathcal{Q}_{l\ge0}=\bigcup_{l\in\mathbb{N}}\mathcal{Q}_l$ 为基底的 $\Bbbk$-向量空间;
- 对任意 $p_1=\alpha_1\ldots\alpha_l$, $p_2=\beta_1\ldots\beta_k\in\mathcal{Q}_{l\ge0}$, 定义 $p_1p_2=\alpha_1\ldots\alpha_l\beta_1\ldots\beta_k$, 如果 $t(\alpha_l)=s(\beta_1)$; 否则取 $p_1p_2=0$.

路代数 $\Bbbk\mathcal{Q}$ 的理想 $\mathcal{I}$ 称作可许理想 (*admissible ideal*), 如果存在 $m\ge2$ 使得 $R_{\mathcal{Q}}^m\subseteq\mathcal{I}\subseteq R_{\mathcal{Q}}^2$, 其中, 记号 $R_{\mathcal{Q}}^l$ 表示 $\Bbbk\mathcal{Q}$ 中所有长度 $\ge l$ 的路生成的理想. 下面给出 gentle 代数的箭图定义, 该定义由 Assem-Skowroński 给出, 见[1]或者[10, Chapter IX, Definition 6.1].

**定义 1.2.** 称有限维代数 $A=\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ 是 *gentle* 代数, 如果 $A$ 满足

(G1) 对任意 $a\in\mathcal{Q}_0$, 以 $a$ 为起点或终点的箭向至多 2 个;

(G2) 对任意 $\alpha\in\mathcal{Q}_1$, 至多存在一个 $\beta\in\mathcal{Q}_1$ 满足 $s(\beta)=t(\alpha)$ $(s(\alpha)=t(\beta)$, resp.), 使得 $\alpha\beta\in\mathcal{I}$ $(\beta\alpha\in\mathcal{I}$, resp.);

(G3) 对任意 $\alpha\in\mathcal{Q}_1$, 至多存在一个 $\beta\in\mathcal{Q}_1$ 满足 $s(\beta)=t(\alpha)$ $(s(\alpha)=t(\beta)$, resp.), 使得 $\alpha\beta\notin\mathcal{I}$ $(\beta\alpha\notin\mathcal{I}$, resp .);

(G4) $\mathcal{I}$ 由长度为 2 的路生成.

为了刻画 gentle 代数的整体维数在其箭图上的表示, 我们需要引入 forbidden 路的概念. Forbidden 路是 Avella-Alaminos 和 Geiß引入的, 包括平凡和非平凡两类. 与之对偶的概念是 permitted 路. Forbidden 路和 permitted 路可以决定 gentle 代数的 AG-导出不变量, 进而研究 gentle 代数在导出等价意义下的分类, 见[11, 12]. 这里, 我们只需要非平凡 forbidden 路. Gentle 代数 $A$ 上的一条非平凡 forbidden 路 $F$ 是长度 $\ge1$ 的路 $p=\alpha_1\ldots\alpha_s$, 使得 $\alpha_i\alpha_j=0$,

$\forall 1 \le i, j \le s$. 特别地，称 $F$ 为极大的，如果对任意 $\alpha \in \mathcal{Q}_1$ 使得 $t(\alpha) = s(\alpha_1)$ （对应的，$s(\alpha) = t(\alpha_s)$），总有 $\alpha\alpha_1 \notin \mathcal{I}$ (对应的，$\alpha_s\alpha \notin \mathcal{I}$).

接下来，我们给出 gentle 代数的矩阵定义，并利用矩阵刻画 gentle 代数上的单模（见推论 1.8).

**定义** 1.3. 对任意 $n \in \mathbb{N}^+$，定义 $T_n$ 表示域 $\Bbbk$ 上的下三角矩阵代数

$$T_n = \left\{ \boldsymbol{X} = (X_{ij})_{1 \le i,j \le n} \mid \text{对任意 } i < j\text{，恒有 } X_{ij} = 0 \right\}.$$

**定义** 1.4. [8] 代数 $A$ 称为 *gentle* 代数，如果:

$$A \cong T_{\boldsymbol{m}} / \simeq := \left\{ (\boldsymbol{X}^1, \cdots, \boldsymbol{X}^t) \mid X^i_{jj} = X^l_{kk}\text{，如果 } (i,j) \simeq (l,k) \right\},$$

其中：$\boldsymbol{m} = (m_1, \cdots, m_t) \in \mathbb{N}^t_{\ge 2}$；$T_{\boldsymbol{m}} := \Pi^t_{i=1} T_{m_i}$；且 “$\simeq$” 是定义在 $\mathcal{O}(\boldsymbol{m}) = \{(i,j) \mid 1 \le i \le t,\ 1 \le j \le m_i\}$ 上的二元映射 $\simeq$: $\mathcal{O}(\boldsymbol{m}) \times \mathcal{O}(\boldsymbol{m}) \to \{0,1\}$，满足:

- 对一些 $(i,j) \in \mathcal{O}(\boldsymbol{m})$，唯一存在 $(l,k) \ne (i,j)$ 有 $(i,j) \simeq (l,k)$；
- 同时，对其余的 $(i,j) \in \mathcal{O}(\boldsymbol{m})$，$(i,j) \not\simeq (l,k)$，$\forall (l,k) \in \mathcal{O}(\boldsymbol{m})$.

特别地，$T_{\boldsymbol{m}}$ 称作 gentle 代数 $A \cong T_{\boldsymbol{m}} / \simeq$ 的标准化代数(*normalization*).

**例** 1.5. 假设 gentle 代数 $A = T_{(3,2)} / \simeq$ 其中 $\boldsymbol{m} = (3,2)$，$\mathcal{O}(\boldsymbol{m}) = \{ (1,1)，(1,2)，(1,3)，(2,1)，(2,2)$ $(2,1) \not\simeq (2,2)$，且 $(1,2) \simeq (2,2)$. 按定义 1.4，$A = T_{(3,2)} / \simeq\ = \{(\boldsymbol{X}^1, \boldsymbol{X}^2) \mid X^1_{22} = X^2_{22}\}$. 且在同构意义下，$A$ 可写成分块对角矩阵的形式 $A = T_3 \times T_2 / \simeq$. 标准化代数 $T_{(3,2)} = T_3 \times T_2$ 的 cartesian 积的因子项 $T_3$ 和 $T_2$ 分别对应上述分块对角矩阵的两个子块. 此外，由定义 1.2，有 $A \cong \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$，其中，

$$\mathcal{Q} = \quad 4 \xrightarrow{a} 3 \quad \begin{matrix} \xrightarrow{b} 2 \\ \xrightarrow{c} 1 \end{matrix} \qquad \text{以及} \quad \mathcal{I} = \langle ab \rangle,$$

**记号** 1.6. 对任意 $\boldsymbol{m} = (m_1, \cdots, m_t) \in \mathbb{N}^t_{\ge 2}$，用记号 $e_{(r,s)}$ $(1 \le r \le t,\ 1 \le s \le m_r)$ 表示 $T_{\boldsymbol{m}} = \Pi^t_{i=1} T_{m_i}$ 中的满足下述条件的矩阵 $(\boldsymbol{X}^1, \cdots, \boldsymbol{X}^t)$:

$$X^{\varpi}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } \varpi = r \text{ 且 } i = j = s; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

进一步地，定义

$$e_{(r,s)(r',s')} = e_{(r,s)} + e_{(r',s')} \qquad (1 \le r, r' \le t,\ 1 \le s \le m_r,\ 1 \le s' \le m_{r'}).$$

**引理** 1.7. 设 $A \cong T_{\boldsymbol{m}} / \simeq$ （其中 $\boldsymbol{m} = (m_1, \cdots, m_t) \in \mathbb{N}^t_{\ge 2}$）是 gentle 代数，并记:

$$\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A) := \{e_{(i,j)} \mid (i,j) \not\simeq (i',j'), \forall (i',j') \in \mathcal{O}(\boldsymbol{m})\},$$
$$\mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A) := \{e_{(i,j)(k,l)} \mid (i,j) \simeq (k,l)\}.$$

则 $\mathfrak{E}(A) := \mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A) \cup \mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$ 是 $A$ 的完全本原正交幂等元集.

**证**. 首先证对任意 $x, y \in \mathfrak{E}(A)$，有 $xy = 0 = yx$. 需验证三个情形: (a) $x \in \mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)$ 且 $y \in \mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$; (b) $x, y \in \mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)$；以及(c) $x, y \in \mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$.

只证明(a), (b)和(c)的证明类似. 任取 $x = e_{(i,j)} \in \mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)$，$y = e_{(r,s)(r',s')} \in \mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$，有

$$e_{(i,j)} e_{(r,s)(r',s')} = e_{(i,j)} e_{(r,s)} + e_{(i,j)} e_{(r',s')}.$$

注意 $(i,j)\neq(r,s)$，否则 $(i,j)=(r,s)\simeq(r',s')$ 与 $\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)$ 的定义矛盾，故由矩阵乘法知 $e_{(i,j)}e_{(r,s)}=0$. 同理，$e_{(i,j)}e_{(r',s')}=0$. 所以 $xy=e_{(i,j)}e_{(r,s)(r',s')}=0$. 类似可证 $yx=0$.

其次，易见 $\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)$ 中的每个元素都是本原的. 对于 $\mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$ 中的任意元素 $y$，设 $y=e_{(r,s)(r',s')}$，$y$ 有唯一的加法分解 $y=e_{(r,s)}+e_{(r',s')}$. 注意 $(r,s)\simeq(r',s')$，因此由 gentle 代数的定义可知 $e_{(r,s)}\notin A$ 且 $e_{(r',s')}\notin A$. 故该加法分解不是代数 $A$ 上的分解，即 $y$ 在 $A$ 上本原.

最后，对任意 $x\in\mathfrak{E}(A)$，$x^2=x$ 由矩阵乘法直接得到. 故 $\mathfrak{E}(A)$ 是 $A$ 的完全本原正交幂等元集. □

记 simp$(A)$ 表示 $A$ 上的全体单模在同构意义下构成的集合. 引理 1.7 已经给出了 $A$ 的完全本原正交幂等元集，由此立刻得到下面结论.

**推论 1.8.** 沿用引理 1.7 中的记号，则 $\mathrm{simp}(A)=\left\{S(e):=\frac{eA}{\mathrm{rad}(eA)}\mid e\in\mathfrak{E}(A)\right\}$.

**注记 1.9.** 由推论 1.8 中，若 $e=e_{(r,s)}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)$，则有右 $A$-模同构

$$e_{(r,s)}A\cong(\widehat{\boldsymbol{T}}^1,\cdots,\widehat{\boldsymbol{T}}^t),\ \text{其中},\ \widehat{T}_{ij}^{\varpi}=\begin{cases}\Bbbk, & \text{如果 } \varpi=r \text{ 且 } i=s;\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

注意这时有关于矩阵的等式 $(\widehat{\boldsymbol{T}}^1,\cdots,\widehat{\boldsymbol{T}}^t)=e_{(r,s)}T_{\boldsymbol{m}}$，简便起见，记作 $T_{\boldsymbol{m}}(r,s)$. 易验证该矩阵是一个有限生成右 $A$-模. 若 $e=e_{(r,s)(r',s')}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$，则有如下右 $A$-模同构

$$e_{(r,s)(r',s')}A\ \cong\ T_{\boldsymbol{m}}(r,s)+T_{\boldsymbol{m}}(r',s')\overset{\text{记作}}{=\!=}T_{\boldsymbol{m}}((r,s)(r',s')).$$

注意，虽然 $T_{\boldsymbol{m}}(r,s)+T_{\boldsymbol{m}}(r',s')$ 是右 $A$-模，但是 $T_{\boldsymbol{m}}(r,s)$ 和 $T_{\boldsymbol{m}}(r',s')$ 都不是右 $A$-模. 进一步地，

$$\mathrm{rad}(e_{(r,s)}A)\cong(\breve{\boldsymbol{T}}^1,\cdots,\breve{\boldsymbol{T}}^t),,\ \text{其中}\ \breve{T}_{ij}^{\varpi}=\begin{cases}\Bbbk, & \text{如果 } \varpi=r,\ i=s \text{且} 1\le j<s\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

方便起见，用 $R_{\boldsymbol{m}}^r(I,J)$ (其中 $I,J\subseteq\{1,2,\cdots,m_r\}$)表示 $A$ 的子集 $(\boldsymbol{R}^1,\cdots,\boldsymbol{R}^t)$ 使得除 $R_{uv}^r=\Bbbk$ (其中 $u\in I$, $v\in J$)之外，其余位置取 0. 则 $\mathrm{rad}(e_{(r,s)}A)=R_{\boldsymbol{m}}^r(\{s\},\mathbb{N}_{\le s-1}^+)$. 由此得到单模在 $\Bbbk$-线性同构下的矩阵表示:

$$S_{(r,s)}=\frac{e_{(r,s)}A}{R_{\boldsymbol{m}}^r(\{s\},\mathbb{N}_{\le s-1}^+)}\cong_{\Bbbk}e_{(r,s)}\Bbbk\quad(\text{其中 } e_{(r,s)}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A));$$

$$S_{(r,s)(r',s')}=\frac{e_{(r,s)(r',s')}A}{R_{\boldsymbol{m}}^r(\{s\},\mathbb{N}_{\le s-1}^+)+R_{\boldsymbol{m}}^{r'}(\{s'\},\mathbb{N}_{\le s'-1}^+)}\cong_{\Bbbk}e_{(r,s)(r',s')}\Bbbk\quad(\text{其中 } e_{(r,s)(r',s')}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)),$$

式中，"$\cong_{\Bbbk}$"表示 $\Bbbk$-向量空间的同构.

**例 1.10.** 取 $A$ 是例 1.5 给定的 gentle 代数，则 $\mathfrak{E}(A)=\{e_{(1,1)},e_{(1,2)(2,2)},e_{(1,3)},e_{(2,1)}\}$. 所以，同构意义下，$A$ 上有 4 个不可分解投射模:

$$e_{(1,1)}A\cong\begin{pmatrix}\Bbbk&&&&\\0&0&&&\\0&0&0&&\\&&&0&\\&&&0&0\end{pmatrix},\quad e_{(1,2)(2,2)}A\cong\begin{pmatrix}0&&&&\\\Bbbk&\hat{\Bbbk}&&&\\0&0&0&&\\&&&0&\\&&&\Bbbk&\hat{\Bbbk}\end{pmatrix},\ e_{(1,3)}A\cong\begin{pmatrix}0&&&&\\0&0&&&\\\Bbbk&\Bbbk&\Bbbk&&\\&&&0&\\&&&0&0\end{pmatrix},\ e_{(2,1)}A\cong\begin{pmatrix}0&&&&\\0&0&&&\\0&0&0&&\\&&&\Bbbk&\\&&&0&0\end{pmatrix}.$$

其中在 $e_{(1,2)(2,2)}A$ 中 $\hat{\Bbbk}$ 中所在位置元素取值相同，并且

$$\operatorname{rad}(e_{(1,1)}A)=0,\quad \operatorname{rad}(e_{(1,2)(2,2)}A)\cong\begin{pmatrix}0&&&&\\ \Bbbk&0&&&\\ 0&0&0&&\\ &&&0&\\ &&&\Bbbk&0\end{pmatrix},\quad \operatorname{rad}(e_{(1,3)}A)\cong\begin{pmatrix}0&&&&\\ 0&0&&&\\ \Bbbk&\Bbbk&0&&\\ &&&0&\\ &&&0&0\end{pmatrix},\quad \operatorname{rad}(e_{(2,1)}A)=0.$$

进一步, 可以得到 4 个单模的矩阵表述:

$$S_{(1,1)}\cong\begin{pmatrix}\Bbbk&&&&\\ 0&0&&&\\ 0&0&0&&\\ &&&0&\\ &&&0&0\end{pmatrix},\quad S_{(1,2)(2,2)}\cong_{\Bbbk}\begin{pmatrix}0&&&&\\ 0&1&&&\\ 0&0&0&&\\ &&&0&\\ &&&0&1\end{pmatrix}\Bbbk,\ S_{(1,3)}\cong_{\Bbbk}\begin{pmatrix}0&&&&\\ 0&0&&&\\ 0&0&\Bbbk&&\\ &&&0&\\ &&&0&0\end{pmatrix},\ S_{(2,1)}\cong\begin{pmatrix}0&&&&\\ 0&0&&&\\ 0&0&0&&\\ &&&\Bbbk&\\ &&&0&0\end{pmatrix}.$$

### 1.2. 投射模与投射分解

设 $A$ 是有限维 $\Bbbk$ -代数. 我们知道, 对任意右 $A$ -模 $M\in\mathsf{mod}(A)$, 总存在正合列

$$\cdots\xrightarrow{p_3^M}P_2^M\xrightarrow{p_2^M}P_1^M\xrightarrow{p_1^M}P_0^M\xrightarrow{p_0^M}M\longrightarrow 0$$

使得对任意 $i\geq 0$ 有 $P_i^M$ 投射. 称上述正合列是 $M$ 的一个*预投射分解*. 特别地, 如果存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $P_n^M\neq 0$ 且 $P_{>n}=0$, 则称 $n$ 是此预投射分解的*长度*. $M$ 可以有不同的预投射分解, 本文中, 称 $M$ 的长度最短的预投射分解称为其*极小预投射分解*或者简称为*投射分解*. 此时, 投射模 $P_0^M$ 或者满同态 $p_0^M:P_0^M\to M$ 称作 $M$ 的*投射覆盖*, 且每个投射模 $P_{i+1}^M$ 或者满同态 $p_{i+1}^M=p_0^{\ker p_i^M}$ : $P_{i+1}^M\to\ker p_i^M$ 都是 $\ker p_i^M$ 的投射覆盖; $\ker p_i^M$ 称作 $M$ 的 $(i+1)$ -*阶合冲*, 记作 $\Omega_{i+1}(M)$.

**定义** 1.11. (投射维数与整体维数) [13] 设 $A$ 是有限维 $\Bbbk$ -代数. 我们称 $M\in\mathsf{mod}(A)$ 的*投射维数* $\operatorname{proj.dim}M\leq n$, 如果 $\Omega_{n+1}(M)=0$ (等价地, $\operatorname{proj.dim}M$ 等于 $M$ 的投射分解的长度). 特别地, 定义 $A$ 的整体维数 $\operatorname{gl.dim}A$ 是全部有限生成右 $A$ -模的投射维数的上确界, 即:

$$\operatorname{gl.dim}A=\sup_{M\in\operatorname{mod}A}\operatorname{proj.dim}M.$$

**注记** 1.12. 通常地, 对任意环 $R$, 称右 $R$ -模 (对应地, 左 $R$ -模) $M$ 的右 (对应地, 左) 投射维数 $\operatorname{proj}_R.\dim M\leq n$ (对应地, ${}_R\operatorname{proj.dim}M\leq n$), 如果 $M$ 有右 (对应地, 左) $R$ -预投射分解:

$$\cdots\to 0\xrightarrow{0}P_n^M\xrightarrow{p_n^M}P_{n-1}^M\to\cdots\to P_1^M\xrightarrow{p_1^M}P_0^M\xrightarrow{p_0^M}M\to 0$$

因此, 定义 $R$ 的右 (对应地, 左) 整体维数 $\operatorname{gl.dim}_R R$ (对应地, ${}_R\operatorname{gl.dim}R$ )是全部有限生成右 (对应地, 左) $R$ -模的投射维数的上确界. 一般来说, $\operatorname{gl.dim}_R R\neq_R\operatorname{gl.dim}R$, Kaplansky 第一个给出了左, 右整体维数不同的环[14]; Jategaonkar 证明了对任意的 $1\leq m<n\leq+\infty$, 都存在环 $R$ 使得 $\operatorname{gl.dim}_R R=m<n={}_R\operatorname{gl.dim}R$ [15]; Fossum, Griffith 和 Reiten 将上述结果进一步推广至 Abel 范畴[16, p.74–75]. 当 $R$ 是有限维 $\Bbbk$ -代数时, 则有 $\operatorname{gl.dim}_R R={}_R\operatorname{gl.dim}R$.

在同构意义下, 记 $\mathsf{proj}(A)$ 是 $A$ 上的全体右 $A$ -投射模构成的集合. 沿用引理 1.7 中的记号, 根据[1, Corollary 5.17], 我们有下述推论.

**推论** 1.13. $\mathsf{proj}(A)=\{e\cdot(T_m/\simeq)\mid e\in\mathfrak{E}(A)\}$.

## 2. 单模的非零合冲及其矩阵表示

注意代数的整体维数可以通过单模的投射维数来计算, 即

$$\operatorname{gl.dim}A=\max_{S\in\operatorname{simp}(A)}\operatorname{proj.dim}S.$$

为此，我们需要对单模的合冲进行刻画．方便起见，我们始终假设 $A$ 是 gentle 代数，其标准化代数为 $T_{\boldsymbol{m}}$，这里 $\boldsymbol{m}=(m_1,\cdots,m_t)\in\mathbb{N}^t_{\geq 2}$，并且二元映射 $\simeq:\mathcal{O}(\boldsymbol{m})\times\mathcal{O}(\boldsymbol{m})\to\{0,1\}$ 总事先给定．

## 2.1. 单模的 1 阶合冲

下面引理给出了单模的投射覆盖的矩阵表示，进一步可得到单模的 1 阶合冲的矩阵表示 (见注记 2.2).

**引理 2.1.** 对任意 $e=e_?\in\mathfrak{E}(A)=\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)\cup\mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$，有 $\Bbbk$-向量空间同构

$$\mathrm{Hom}_A(eA,S(e))\cong_{\Bbbk}\mathrm{span}\{\hat{p}:T_{\boldsymbol{m}}(?)\to e_?\Bbbk\},$$

其中，$\hat{p}$ 是典范投射，即，对任意属于 $T_{\boldsymbol{m}}(?)$ 的矩阵 $\boldsymbol{X}$，$\hat{p}(\boldsymbol{X})$ 将 $\boldsymbol{X}$ 处于主对角线以外的元素映射为 0，主对角线上的元素保持不变．

**证.** 如果 $e\in\mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$，则存在 $(r,s)\simeq(r',s')\in\mathcal{O}(\boldsymbol{m})$ 使得 $e=e_{(r,s)(r',s')}$．首先 $p_0^{S(e)}:eA\to S(e)$ 既是 $S(e)$ 的投射覆盖，也是典范满同态 $\hat{p}_0^{S(e)}:eA\to eA/\mathrm{rad}(eA)$．根据注记 1.9 可知，

$$eA\cong T_{\boldsymbol{m}}((r,s)(r',s')),\ eA/\mathrm{rad}(eA)\cong_{\Bbbk}e_{(r,s)(r',s')}\Bbbk\,.$$

由此易见 $\hat{p}_0^{S(e)}\in\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(T_{\boldsymbol{m}}((r,s)(r',s')),\ e_{(r,s)(r',s')}\Bbbk)$ 保持 $\boldsymbol{X}$ 的主对角线上的元素不变，并将 $\boldsymbol{X}$ 的其余元素映射为 0( $\boldsymbol{X}$ 是任意给定的属于 $T_{\boldsymbol{m}}((r,s)(r',s'))$ 的矩阵)．于是，存在 $\Bbbk$-向量空间的典范嵌入

$$\kappa:\ \mathrm{span}\{\hat{p}\}\xrightarrow{\subseteq}\mathrm{Hom}_A(eA,S(e)).$$

另一方面，$\mathrm{Hom}_A(eA,S(e))\cong S(e)e$，且由有限维代数上的单模 $S(e)$ 总是 1 维的 $\Bbbk$-向量空间可知 $S(e)e$ 也是 1 维的，所以有 $\Bbbk$-向量空间同构 $\mathrm{Hom}_A(eA,S(e))\cong_{\Bbbk}\Bbbk$．所以 $\kappa$ 是 $\Bbbk$-线性同构．对于 $e\in\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)$ 的情形，证明类似． □

**注记 2.2.** 沿用引理 2.1 中的记号．对矩阵 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}^1,\cdots,\boldsymbol{X}^t)\in A$，用记号 $\boldsymbol{X}\mathbf{E}^i_{x\leftrightarrow y}$ 表示交换 $\boldsymbol{X}^i$ 的第 $x$ 行和第 $y$ 行．则引理 2.1 给出了投射覆盖 $p_0^{S(e)}:P_0^{S(e)}=eA\to S(e)$ 的矩阵刻画．进一步地，

(i) 如果 $e=e_{(r,s)}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)$，则有右 $A$-同构

$$\Omega_1(S(e))\ (=\ker p_0^{S(e)})\ \cong\ \mathrm{rad}(e_{(r,s)}T_{\boldsymbol{m}})\mathbf{E}^r_{s\leftrightarrow s-1}\ =\ R^r_{\boldsymbol{m}}(\{s-1\},\,\mathbb{N}^+_{\leq s-1}).$$

(ii) 如果 $e=e_{(r,s)(r',s')}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$，则有右 $A$-同构

$$\Omega_1(S(e))\ (=\ker p_0^{S(e)})\ \cong\ \mathrm{rad}(e_{(r,s)(r',s')}T_{\boldsymbol{m}})\mathbf{E}^r_{s\leftrightarrow s-1}\mathbf{E}^{r'}_{s'\leftrightarrow s'-1}\,.$$

注意(ii)所给的右 $A$-同构进一步指出 $\Omega_1(S(e))$ 作为 $\Bbbk$-向量空间时，同构于:

- $R\oplus R'$，如果 $(r,s-1)\neq(i,j)\ \forall(i,j)\in\mathcal{O}(\boldsymbol{m})$ 且 $(r',s'-1)\neq(i,j)\ \forall(i,j)\in\mathcal{O}(\boldsymbol{m})$；
- $\big((R+e_{(u,v)}\Bbbk)/\mathfrak{S}\big)\oplus_{\Bbbk}R'$，如果 $(r,s-1)\simeq(u,v)$ 且 $(r',s'-1)\neq(i,j)\ \forall(i,j)\in\mathcal{O}(\boldsymbol{m})$
- $R\oplus_{\Bbbk}\big((R'+e_{(u',v')}\Bbbk)/\mathfrak{S}'\big)$，如果 $(r,s-1)\neq(i,j)\ \forall(i,j)\in\mathcal{O}(\boldsymbol{m})$ 且 $(r',s'-1)\simeq(u',v')$；
- $\big((R+e_{(u,v)}\Bbbk)/\mathfrak{S}\big)\oplus_{\Bbbk}\big((R'+e_{(u',v')}\Bbbk)/\mathfrak{S}'\big)$，如果 $(r,s-1)\simeq(u,v)$ 且 $(r',s'-1)\simeq(u',v')$．

式中，$R=R^r_{\boldsymbol{m}}(\{s-1\},\mathbb{N}^+_{\leq s-1})$，$R'=R^{r'}_{\boldsymbol{m}}(\{s'-1\},\mathbb{N}^+_{\leq s'-1})$，$\mathfrak{S}=\mathrm{span}\{e_{(u,v)}-e_{(r,s-1)}\}$，$\mathfrak{S}'=\mathrm{span}\{e_{(u',v')}-e_{(r',s'-1)}\}$，“$\oplus_{\Bbbk}$”表示作为 $\Bbbk$-向量空间的直和，并且上式第一个情形下的 $\Bbbk$-向量空间同构同时也是右 $A$-模同构.

**推论 2.3.** 设 $s\geq 2$．则 $R=R^r_{\boldsymbol{m}}(\{s\},\mathbb{N}^+_{\leq s-1})$ 不可分解投射当且仅当对任意 $(i,j)\in\mathcal{O}(\boldsymbol{m})$ 有

$(r, s-1) \neq (i, j)$.

**证.** 注意 $R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\}, \mathbb{N}_{\leq s-1}^{+})$ 是右 $A$-模. 由注记 2.2 易知它是 $\mathrm{rad}(e_{(r,s)}A)$ 的直和项. 则:

$$R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s-1\}, \mathbb{N}_{\leq s-1}^{+}) = R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\}, \mathbb{N}_{\leq s-1}^{+})\, \mathbf{E}_{s \leftrightarrow s-1}^{r} \cong R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\}, \mathbb{N}_{\leq s-1}^{+})$$

即 $R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\}, \mathbb{N}_{\leq s-1}^{+}) \cong e_{(r,s-1)}A$. 此时, 如果对任意 $(i,j) \in \mathcal{O}(\boldsymbol{m})$ 都有 $(r, s-1) \neq (i, j)$ 则由引理 1.7 得 $e_{(r,s-1)} \in \mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)$, 故 $e_{(r,s-1)}A$ 是不可分解投射模. 反之, 若存在 $(i,j) \in \mathcal{O}(\boldsymbol{m})$ 有 $(r, s-1) \simeq (i, j)$, 则由引理 1.7 得 $e_{(r,s-1)} \notin \mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)$ (此时 $e_{(r,s-1)(i,j)} \in \mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$), 因此由注记 1.9 可知 $e_{(r,s-1)}(T_{\boldsymbol{m}}/\simeq)$ 非投射, 矛盾. □

## 2.2. 单模的高阶合冲

类似引理 2.1, 下面命题给出了单模的任意阶合冲的投射覆盖的矩阵表示, 由此, 类似于注记 2.2, 该命题也给出了单模的任意阶合冲的矩阵表示.

**命题 2.4.** 设 $e = e_{(r,s)(u,v)} \in \mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$ 是 $A = T_{\boldsymbol{m}}/\simeq$ 的本原幂等元. 如果

$$\Omega_n(S(e)) \cong_{\mathbb{k}} (R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\}, \mathbb{N}_{\leq s}^{+}) \oplus_{\mathbb{k}} e_{(u,v)}\mathbb{k}) / \mathfrak{S}$$

( 或者 $\Omega_n(S(e)) = \omega_n^1 \oplus \omega_n^2$, 这里, $\omega_n \cong_{\mathbb{k}} (R_{\boldsymbol{m}}^{r^\jmath}(\{s\}, \mathbb{N}_{\leq s}^{+}) \oplus_{\mathbb{k}} e_{(u,v)}\mathbb{k}) / \mathfrak{S}$, $\jmath \in \{1,2\}$ ),
其中, $\mathfrak{S} = \mathrm{span}\{e_{(u,v)} - e_{(r,s)}\}$ (或者 $\mathfrak{S}^\jmath = \mathrm{span}\{e_{(u,v)} - e_{(r,s)}\}$), 则有 $\mathbb{k}$-向量空间同构

$$\mathrm{Hom}_A(eA, \Omega_n(S(e))) \cong_{\mathbb{k}} \mathrm{span}\left\{\hat{p} : T_{\boldsymbol{m}}((r,s)(u,v)) \to (R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\}, \mathbb{N}_{\leq s}^{+}) \oplus_{\mathbb{k}} e_{(u,v)}\mathbb{k}) / \mathfrak{S}\right\}$$

( 或者 $\mathrm{Hom}_A(eA, \omega_n) \cong_{\mathbb{k}} \mathrm{span}\left\{\hat{p} : T_{\boldsymbol{m}}((r,s)(u,v)) \to (R_{\boldsymbol{m}}^{r^\jmath}(\{s\}, \mathbb{N}_{\leq s}^{+}) \oplus_{\mathbb{k}} e_{(u,v)}\mathbb{k}) / \mathfrak{S}\right\}$ ),
其中, $\hat{p}$ 是(或者 $\hat{p}^\jmath$)按像空间作为原像空间 $T_{\boldsymbol{m}}((r,s)(u,v))$ (或者 $T_{\boldsymbol{m}}((r,s)(u,v))$)子空间所诱导的典范投射.

**证.** 设 $\Omega_n(S(e)) \cong_{\mathbb{k}} (R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\}, \mathbb{N}_{\leq s}^{+}) \oplus_{\mathbb{k}} e_{(u,v)}\mathbb{k}) / \mathfrak{S}$. 注意这时

$$eA \cong e_{(r,s)(u,v)}(T_{\boldsymbol{m}}/\simeq) \cong_{\mathbb{k}} T_{\boldsymbol{m}}((r,s)(u,v)),$$

所以对于 $p_0^{\Omega_n(S(e))} \in \mathrm{Hom}_A(eA, \Omega_n(S(e)))$, 它作为 $\mathbb{k}$-线性变换时, 同构于 $\hat{p}$. 所以, 有 $\mathbb{k}$-向量空间的典范嵌入:

$$\kappa : \mathrm{span}\left\{\hat{p} : T_{\boldsymbol{m}}((r,s)(u,v)) \to (R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\}, \mathbb{N}_{\leq s}^{+}) \oplus_{\mathbb{k}} e_{(u,v)}\mathbb{k}) / \mathfrak{S}\right\} \xrightarrow{\subseteq} \mathrm{Hom}_A(eA, \Omega_n(S(e))).$$

注意有右 $A$-模同构 $\mathrm{Hom}_A(eA, \Omega_n(S(e))) \cong \Omega_n(S(e))e$, 进而有 $\mathbb{k}$-向量空间的同构

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_A(eA, \Omega_n(S(e))) &\cong_{\mathbb{k}} \left((R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\}, \mathbb{N}_{\leq s}^{+}) \oplus_{\mathbb{k}} e_{(u,v)}\mathbb{k}) / \mathfrak{S}\right) e_{(r,s)(u,v)} \\
&= \left((R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\}, \mathbb{N}_{\leq s}^{+}) e_{(r,s)(u,v)} \oplus_{\mathbb{k}} e_{(u,v)}\mathbb{k}\right) / \mathfrak{S} \\
&= \left(e_{(r,s)}\mathbb{k} \oplus_{\mathbb{k}} e_{(u,v)}\mathbb{k}\right) / \mathrm{span}\{e_{(r,s)} - e_{(u,v)}\} \cong_{\mathbb{k}} \mathbb{k}.
\end{aligned}$$

即 $\mathrm{Hom}_A(eA, \Omega_n(S(e)))$ 是 1 维 $\mathbb{k}$-向量空间, 所以 $\kappa$ 是 $\mathbb{k}$-线性同构. 对于 $\Omega_n(S(e)) = \omega_n^1 \oplus \omega_n^2$ 的情形的证明类似. □

**注记 2.5.** 沿用命题 2.4 中的记号, 类似于注记 2.2, 有 $\Omega_{n+1}(S(e)) = \omega_{n+1}^1(S(e)) \oplus \omega_{n+1}^2(S(e))$,
其中,

$$\omega_{n+1}^{\jmath}(S(e)) \cong_{\mathbb{k}} \begin{cases} R, & \text{如果 } (u, v-1) \neq (i, j), \forall (i, j) \in \mathcal{O}(\boldsymbol{m}); \\ (R + e_{(w,x)}\mathbb{k}) / \mathfrak{S}, & \text{如果 } (u, v-1) \simeq (w, x). \end{cases} \quad (\jmath \in \{1,2\})$$

式中，$R\ \ = R_{\boldsymbol{m}}^{u^\jmath}(\{v\ \ -1\}, \mathbb{N}^+_{\le v^\jmath-1})$，$\mathfrak{S}^\jmath = \mathrm{span}\{e_{(w\ ,x\ )} - e_{(u\ ,v\ -1)}\}$，并且上式第一个情形下的 $\Bbbk$ -向量空间同构同时也是右 $A$ -模同构.

**记号** 2.6. 对任意 $M \in \mathrm{mod}(A)$，我们用 $\Omega(M)$ 表示 $M$ 的全体非零合冲构成的集合.

## 3. Gentle 代数的整体维数

为刻画 gentle 代数的整体维数，我们引入标准化代数 $T_{\boldsymbol{m}} = (T_{m_1}, \cdots, T_{m_t})$ 的关联子块的定义，其中 $\boldsymbol{m} = (m_1, \cdots, m_t) \in \mathbb{N}^t_{\ge 0}$. 称 $T_{\boldsymbol{m}}$ 的子块 $T_{m_r}$ 和 $T_{m_u}$ 是关联的，记作 $T_{m_r} \sim T_{m_u}$，如果存在 $1 \le s \le m_r$，$1 \le v \le m_u$ 使得 $(r,s) \simeq (u,v)$，并称集合 $\{(r,s),(u,v)\}$ 是此关联的关联集. $T_{\boldsymbol{m}}$ 的关联子块组是子块序列 $\{T_{m(j)}\}_{j=1}^n$（其中，$m(j) \in \{m_i | 1 \le i \le t\}$，$n \in \mathbb{N}^+$ 或等于 $\infty$）使得对任意 $1 \le j < n$ 有关联 $T_{m(j)} \sim T_{m(j+1)}$，并进一步称 $T_{\boldsymbol{m}}$ 的分块 $T_{m(j)}$ 是此关联子块组的 $j$ -关联结. 称关联子块组 $\{T_{m(j)}\}_{j=1}^n$ 是连续的，如果对任意 $1 \le j < n$，关联 $T_{m(j-1)} \sim T_{m(j)}$ 和 $T_{m(j)} \sim T_{m(j+1)}$ 的关联集 $\{(u'_{j-1}, v'_{j-1}), (r_j, s_j)\}$ 和 $\{(r'_j, s'_j), (u_{j+1}, v_{j+1})\}$ 能使 $r'_j = r_j, s'_j = s_j - 1$ 成立. 特别地，称连续关联子块组 $C_1 = \{T_{m(j)}\}_{j=1}^n$ 是极大的，如果对任意连续关联子块组 $C_2$ 使得 $C_1 \subseteq C_2$，总是有 $C_1 = C_2$.

**命题** 3.1. *任取 $e \in \mathfrak{E}(A)$，存在 $T_{\boldsymbol{m}}$ 的极大连续关联子块组 $C(e) = \{T_{m(j)}\}_{j=1}^{n_e}$（$n_e \in \mathbb{N}^+$ 或为 $\infty$），使得关联结集合 $\{T_{m(j)} | 1 \le j \le n_e\}$ 和非零合冲集 $\Omega(S(e))$ 一一对应.*

**证**. 不妨设 $e = e_{(u_0^1, v_0^1)(u_0^2, v_0^2)} \in \mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$，则由引理 2.1，有 $\Bbbk$ -向量空间同构

$$\mathrm{Hom}_A(eA, S(e)) \cong_{\Bbbk} \mathrm{span}\left\{\hat{p}_0^{S(e)}: T_{\boldsymbol{m}}((u_0^1, v_0^1)(u_0^2, v_0^2)) \to e_{(u_0^1, v_0^1)(u_0^2, v_0^2)}\Bbbk\right\},$$

则得 $e_{(u_0^1, v_0^1)} \in T_{m(u_0^1)}$，$e_{(u_0^2, v_0^2)} \in T_{m(u_0^2)}$. 其中，$\hat{p}_0^{S(e)}$ 由 $S(e)$ 的投射覆盖 $p_0^{S(e)} \to S(e)$ 作为 $\Bbbk$ -线性变换得到. 由注记 2.2，$\Omega_1(S(e)) = \ker(p_0^{S(e)}) = \omega_1^1 \oplus \omega_1^2 \cong_{\Bbbk} R_1^1 \oplus R_1^2$，其中 $R_1^\jmath \cong_{\Bbbk} R_{\boldsymbol{m}}^{u_0^\jmath}(\{v_0^\jmath\}, \mathbb{N}^+_{\le v_0^\jmath - 1})$，$\jmath \in \{1,2\}$. 如果存在 $(u_1, v_1) \simeq (u_0, v_0 - 1)$，则进一步有

$$R_1 \cong_{\Bbbk} (R_{\boldsymbol{m}}^{u_0^\jmath}(\{v_0 - 1\}, \mathbb{N}^+_{\le v_0 - 1}) \oplus_{\Bbbk} e_{(u_1, v_1)}\Bbbk) \big/ \mathrm{span}\{e_{(u_1, v_1)} - e_{(u_0, v_0 - 1)}\}.$$

则根据命题 2.4 (在此命题中取 $n = 1$)，有 $\Bbbk$ -向量空间同构

$$\mathrm{Hom}_A(e_{(u_0, v_0 - 1)(u_1, v_1)}A\ \ \omega_1) \cong_{\Bbbk} \mathrm{span}\left\{T_{\boldsymbol{m}}\ \ u_0\ \ v_0 - 1)(u_1, v_1)) \to R_1\ \right\}$$

则 $e_{(u_1, v_1)} \in T_{m(u_1)}$. 此时 $T_{m(u_0)} \sim T_{m(u_1)}$，关联集合为 $\{(u_0, v_0 - 1), (u_1, v_1)\}$. 由注记 2.5 可知（在此注记中取 $n = 1$）$\omega_2 \cong_{\Bbbk} (R_2 + e_{(u_2, v_2)}\Bbbk) \big/ \mathfrak{S}$，如果存在 $(u_1, v_1 - 1) \simeq (u_2, v_2)$；否则 $\omega_2 \cong_{\Bbbk} R_2$，此时根据推论 2.3，$\omega_2^\jmath$ 是不可分解投射模. 再次使用命题 2.4 (在此命题中取 $n = 2$)，有

$$\mathrm{Hom}_A(e_{(u_1, v_1 - 1)(u_2, v_2)}A, \omega_2) \cong_{\Bbbk} \mathrm{span}\left\{T_{\boldsymbol{m}}((u_1, v_1 - 1)(u_2, v_2)) \to R_2\right\},$$

并且得 $e_{(u_2, v_2)} \in T_{m(u_2)}$. 此时 $T_{m(u_1)} \sim T_{m(u_2)}$，关联集合为 $\{(u_1, v_1 - 1), (u_2, v_2)\}$.

易见 $\{T_{m(u_0)}, T_{m(u_1)}, T_{m(u_2)}\}$ 是 $T_{\boldsymbol{m}}$ 的一个连续关联子块组. 由归纳法，我们可以构造一个 $T_{\boldsymbol{m}}$ 的极大连续关联子块组 $\{T_{m(u_j^\jmath)}\}_{j=1}^{n_e^\jmath}$，使得 $f: \{T_{m(u_j^\jmath)} | 1 \le j \le n_e^\jmath\} \to \Omega(S(e))$，$T_{m(u_j^\jmath)} \mapsto \Omega_j(S(e))$ 是双射，这是因为:

情形 1. 如果存在 $n \in \mathbb{N}^+$ 使得 $\Omega_n(S(e)) \ne 0$ 但 $\Omega_{n+1}(S(e)) = 0$，此时 $\omega_n^\jmath$ 是不可分解投射模

(见推论 2.3), 且 $\omega_{n+1} \cong R_{n+1}$ 维数等于 0.

情形 2. 如果对任意 $n \in \mathbb{N}^{+}$ 都有 $\Omega_n(S(e)) \neq 0$, 重复使用命题 2.4, 然后由推论 2.3, 得

$\omega_n \cong R_n \neq 0$. 此时 $\{T_{m(u_j^i)}\}_{j=1}^{n_e^j}$ 和 $\Omega(S(e))$ 都是可数无限集.

注意 $j \in \{1,2\}$, 取 $n_e = \max\{n_e^1, n_e^2\}$ 即得所要寻找的 $T_{\boldsymbol{m}}$ 的极大连续关联子块组. □

**定理** 3.2. 设 gentle 代数 $A$ 非单, 其标准化代数 $T_{\boldsymbol{m}}$ 的全体极大连续关联子块组构成的集合是 $\mathfrak{m}(A)$, 则:

$$\mathrm{gl.dim}\, A = \max_{\{T_{m(j)}\}_{j=1}^{n} \in \mathfrak{m}(A)} n \text{，其中 } n \in \mathbb{N}^{+} \bigcup \{\infty\}.$$

**证**. 由 $\mathrm{gl.dim}A = \max\limits_{S \in \mathrm{simp}(A)} \mathrm{proj.dim}S$ 以及命题 3.1 即得. □

令 $\mathcal{F}(A)$ 是由 gentle 代数 $A$ 上的全体极大的非平凡 forbidden 路构成的集合, $\mathfrak{m}(A)$ 是 $A$ 上全体极大连续关联子块组构成的集合. 下面给出 gentle 代数的整体维数在箭图上的表示.

**定理** 3.3. 设 $A$ 是 gentle 代数. 则 $\mathrm{gl.dim}A = \max\limits_{F \in \mathcal{F}(A)} \ell(F)$.

**证**. 为证此命题, 我们只需证存在双射 $\digamma: \mathcal{F}(A) \to \mathfrak{m}(A)$. 证明分为(a)和(b)两个部分. 我们在(a)中先给出 $\digamma$ 的构造, 并证明 $\digamma$ 是单射. 然后我们在(b)中证明 $\digamma$ 也是满射.

(a) 设 $\boldsymbol{m} = (m_1, \cdots, m_t) \in \mathbb{N}_{\geq 2}^{t}$. 任取 $F = \alpha_1 \cdots \alpha_n \in \mathcal{F}(A)$, 由 $\alpha_i \alpha_{i+1} \in \mathcal{I}$ $(1 \leq i < n)$, 可知存在 $r_1, \ldots, r_n \in \{m_1, \ldots, m_t\}$, 使得

$$(r_j, s_j) \simeq (r_{j+1}, s_{j+1}) \text{ 和 } (r_{j+1}, s_{j+1} - 1) \simeq (r_{j+2}, s_{j+2}) \ (\forall j = 1, 3, 5, \ldots (\leq n-2)).$$

此时, 令 $\digamma(F) := \{T_{m(j)}\}_{j=1}^{n}$, 使得有如下关联

$$T_{m(j)} \simeq T_{m(j+1)} \ (\text{关联集 } \{(r_j, s_j), (r_{j+1}, s_{j+1})\});$$

$$\text{以及 } T_{m(j+1)} \simeq T_{m(j+2)} \ (\text{关联集 } \{(r_{j+1}, s_{j+1} - 1), (r_{j+2}, s_{j+2})\}).$$

显然, 对不同的极大的非平 forbidden 凡路 $F$, 按上述构造所得的 $\digamma(F)$ 唯一决定. 于是 $\digamma$ 单.

(b) 反之, 任取 $\{T_{m(j)}\}_{j=1}^{n} \in \mathcal{F}(A)$, 并设

$$T_{m(j-1)} \sim T_{m(j)} \ (\text{关联集 } \{(u'_{j-1}, v'_{j-1}), (r_j, s_j)\}),$$

$$T_{m(j)} \sim T_{m(j+1)} \ (\text{关联集 } \{(r'_j, s'_j), (u_{j+1}, v_{j+1})\}).$$

令 $(u'_{j-1}, v'_{j-1} + 1)$ 对应点 $t_{j-1} \in \mathcal{Q}_0$, $(u'_{j-1}, v'_{j-1})$ 和 $(r_j, s_j)$ 对应点 $t_j \in \mathcal{Q}_0$, $(r'_j, s'_j)$ 和 $(u_{j+1}, v_{j+1})$ 对应点 $t_{j+1} \in \mathcal{Q}_0$, $(r_j, s_j + 1)$ 对应点 $t_{j+1} \in \mathcal{Q}_0$. 则存在箭向 $\alpha_{j-1}: t_{j-1} \to t_j$, $\alpha_j: t_j \to t_{j+1}$ 和 $\alpha_{j+1}: t_{j+1} \to t_{j+2}$ 使得 $\alpha_{j-1}\alpha_j \in \mathcal{I}$ 且 $\alpha_j \alpha_{j+1} \in \mathcal{I}$. 可见 $\{T_{m(j)}\}_{j=1}^{n}$ 对应一条非平凡的 forbidden 路 $p = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$. 注意 $\{T_{m(j)}\}_{j=1}^{n}$ 是极大的, 所以 $p$ 也极大. 否则, 若存在 $p' \supseteq p$ 极大, 则根据(a)有 $\digamma(p') \supseteq \{T_{m(j)}\}_{j=1}^{n}$, 与 $\{T_{m(j)}\}_{j=1}^{n}$ 极大性矛盾. 这样就构造了 $p \in \mathcal{F}(A)$ 使得 $\digamma(p) = \{T_{m(j)}\}_{j=1}^{n}$. 于是 $\digamma$ 满. 再由定理 3.2, 可知此定理成立. □

## 参考文献


[1] Assem I., Skowroński A. Iterated tilted algebras of type $\tilde{\mathbb{A}}_n$ [J]. Mathematische Zeitschrift, 1987, 195(2): 269-290.

[2] Butler M. C. R., Ringel C. M. Auslander-Reiten sequences with few middle terms and

applications to string algebras [J]. Communications in Algebra, 1987, 15(1-2): 145-179.
[3] Wald B., Waschbüsch J. Tame biserial algebras [J]. Journal of algebra, 1985, 95(2): 480-500.
[4] Crawley-Boevey W. W. Maps between representations of zero-relation algebras [J]. Journal of Algebra, 1989, 126(2): 259-263.
[5] Krause H. Maps between tree and band modules [J]. Journal of Algebra, 1991, 137(1): 186-194.
[6] Baur K., Simões R. C. A geometric model for the module category of a gentle algebra [J]. International Mathematics Research Notices, 2021, 2021(15): 11357-11392.
[7] He P., Zhou Y., Zhu B. A geometric model for the module category of a skew-gentle algebra [EB/OL]. 2020-12-28[2022-8-3], arXiv preprint: arXiv:2004.11136.
[8] Burban I., Drozd Y. On the derived categories of gentle and skew-gentle algebras: homological algebra and matrix problems [EB/OL]. 2017-1-26[2022-8-3], arXiv preprint: arXiv:1706.08358.
[9] Liu,Y.-Z. and Gao, H. and Huang, Z. Homological Dimensions of Gentle Algebras via Geometric models[J]. Science China Mathematics, 2023, pulishing online, doi:10.1007/s11425-022-2120-8.
[10] Assem I., Simson D., Skowroński A. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1: Techniques of Representation Theory [M]. Cambridge University Press, 2006.
[11] Avella-Alaminos D., Geiss C. Combinatorial derived invariants for gentle algebras [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2008, 212(1): 228-243.
[12] Amiot, C., Plamondon, P.-G. and Schroll, S. A complete derived invariant for gentle algebras via winding numbers and Arf invariants [EB/OL]. 2019-4-11 [2022-8-3], arXiv preprint: arXiv:1904.02555.
[13] Weibel C. A. An introduction to homological algebra [M]. Cambridge university press, 1995.
[14] Kaplansky I. On the dimension of modules and algebras X: a right hereditary ring which is not left hereditary [J]. Nagoya Mathematical Journal, 1958, 13:85-88.
[15] Jategaonkar A. V. A counter-example in ring theory and homological algebra. Journal of Algebra, 1969 , 12(3): 418-440.
[16] Fossum R. M., Griffith P. A., Reiten I. Trivial Extensions of Abelian Categories: Homological Algebra of Trivial Extensions of Abelian Catergories with Applications to Ring Theory [M], volume 456, Springer, 2006.